Početní část 1 - 12.7.2021

1. Jde o rovnici se separovanými proměnnými pro $f(x) = -2x$ a $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, budeme postupovat 6ti korokovým postupem:

   (a) $D_f = \mathbb{R} = I$,

   (b) $D_g = [-1,1]$ a $g(y) = 0$ pro $y = \pm 1$ a tedy $J = (-1,1)$,

   (c) stacionární řešení (na I) jsou $y_0 = -1$ a $y_1 = 1$,

   (d) $\displaystyle\int f \overset{c}{=} -x^2 = F(x), \quad \int \frac{1}{g} \overset{c}{=} \arcsin y = G(y)$,

   (e) platí $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a pro $M = \{x : F(x) + C \in G(J)\}$ dostaneme

   $$M = \begin{cases} \varnothing, & C \le \frac{\pi}{2}, \\ (-\sqrt{C+\frac{\pi}{2}}, \sqrt{C+\frac{\pi}{2}}), & -\frac{\pi}{2} < C < \frac{\pi}{2}, \\ (-\sqrt{C+\frac{\pi}{2}}, -\sqrt{C-\frac{\pi}{2}}) \cup (\sqrt{C-\frac{\pi}{2}}, \sqrt{C+\frac{\pi}{2}}), & C \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   Protože $G^{-1}(t) = \sin t$ dostáváme řešení:

   $$y_2(x) = \sin\bigl(-x^2 + C\bigr), \quad x \in (-\sqrt{C+\tfrac{\pi}{2}}, \sqrt{C+\tfrac{\pi}{2}}), \quad -\tfrac{\pi}{2} < C < \tfrac{\pi}{2},$$
   $$y_3(x) = \sin\bigl(-x^2 + C\bigr), \quad x \in (-\sqrt{C+\tfrac{\pi}{2}}, -\sqrt{C-\tfrac{\pi}{2}}), \quad C \ge \tfrac{\pi}{2},$$
   $$y_4(x) = \sin\bigl(-x^2 + C\bigr), \quad x \in (\sqrt{C-\tfrac{\pi}{2}}, \sqrt{C+\tfrac{\pi}{2}}), \quad C \ge \tfrac{\pi}{2}.$$

   (f) lepením na stacionární řešení dostáváme maximální řešení (na $\mathbb{R}$)

   $$y_5(x) = \begin{cases} \sin(-x^2 + C), & x \in (-\sqrt{C+\frac{\pi}{2}}, \sqrt{C+\frac{\pi}{2}}), \\ -1, & \text{jinak}, \end{cases}$$

   pro $-\frac{\pi}{2} < C < \frac{\pi}{2}$ a

   $$y_5(x) = \begin{cases} \sin(-x^2 + C), & x \in (-\sqrt{C+\frac{\pi}{2}}, -\sqrt{C-\frac{\pi}{2}}), \\ \sin(-x^2 + D), & x \in (\sqrt{D-\frac{\pi}{2}}, \sqrt{D+\frac{\pi}{2}}), \\ 1, & x \in [-\sqrt{C-\frac{\pi}{2}}, \sqrt{D-\frac{\pi}{2}}], \\ -1, & \text{jinak}, \end{cases}$$

   pro $C < D$, $C, D \ge \frac{\pi}{2}$.

   Pro řešení počáteční podmínky volíme y_5 s $C = 0$.

2. Budeme sčítat mocninnou řadu $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+3)}$, přičemž poloměr konvergence je zjevně 1. Nejdříve použijeme rozklad na parciální zlomky

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{3x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3}$$

pro $0 < |x| < 1$, obě řady mají opět poloměr konvergence 1, takže můžame použít aritmetiku řad. Máme

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

což dává $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \stackrel{c}{=} -\log(1-x)$.

Porovnáním hodnot v 0 dostaneme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$.

Podobně $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^3}{1-x}$ a tedy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} &\stackrel{c}{=} \int \frac{x^3}{1-x}\, dx = \int \frac{x^3-1}{1-x} + \frac{1}{1-x}\, dx \\ &= \int -x^2 - x - 1 + \frac{1}{1-x}\, dx \stackrel{c}{=} -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \log(1-x) \end{aligned}$$

a porovnáním hodnot v 0 dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \log(1-x).$$

Celkově dostáváme pro $0 < |x| < 1$

$$f(x) = -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{9} + \frac{1}{6x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{\log(1-x)}{3x^3}.$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ konverguje (srovnávím s $\sum \frac{1}{n^2}$) a platí $\lim_{x \to 1-} f(x) = \frac{11}{18}$, dostáváme podle Abelovy věty

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{11}{18}.$$